Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна

Локалізація розв'язку змішаної задачі ПДР

Виконала: студентка групи МП-51
Спеціальності 113 Прикладна математика
Шевчук Д. Р.
Науковий керівник: Стєпанова К. В.

Постановка задачі

В області
$Q = (0, T) \times \Omega, \Omega = \Omega_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |x| < R\}, n \geq 1,$
$0 < T < \infty, R < \infty,$ розглядається наступна задача:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q-1} u) - \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} a_i(t, x, u, D_x u) = 0, \quad 0 < q < p; \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma(1)} = \tilde{f}(t, x), \quad u|_{\Gamma(R)} = 0; \tag{2}$$

$$u(0, x) = u_0 \in L_{q+1}(\Omega); \tag{3}$$

$$\mathrm{supp} u_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < d\}, \quad 1 < d < R. \tag{4}$$

$\Gamma(s) \equiv (0, T) \times \partial B(s), B(s) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < s\}.$

Постановка задачі

Функції a_i задовільняють наступним умовам:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,s,\xi)\xi_i \geq d_0 \left|\xi\right|^{p+1} \quad \forall (t,x,s,\xi) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \quad d_0 > 0; \tag{5}$$

$$\left|a_i(t,x,s,\xi)\right| \leq d_1 \left|\xi\right|^{p} \quad \forall (t,x,s,\xi) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n,\ d_1 < \infty,\ i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Постановка задачі

Простим прикладом для більш наглядного та зрозумілого аналога поставленої задачі (1)-(3) може виступати наступна модель:

$$u_t = (u^m)_{xx} \quad \forall (t,x) \in (0,T) \times (0,\infty), \quad m > 1, \quad T < \infty; \tag{7}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0,\infty), \tag{8}$$

$$u(t,0) = f(t) \quad \forall t \in [0,T), \tag{9}$$

$$f(t) \to \infty \quad \text{при} \quad t \to T, \tag{10}$$

де u_0 та f є заданими невід'ємними неперервними функціями, що задовільняють наступній умові: $u_0(0) = f(0)$.

Означення (енергетичного узагальненого розв'язку)

Функція $u(t,x)$ *є енергетичним узагальненим розв'язком задачі (1)-(3), якщо для будь-якого* $T_0 < T$ *виконується наступна інтегральна тотожність:*

$$\int_0^{T_0} \langle (|u|^{q-1}u)'_t, \eta \rangle dt + \int_0^{T_0} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,u,D_x u)\eta_{x_i} dxdt = 0,$$

де $\eta(t,x)$ *- довільна функція із* $L_{p+1}(0, T_0; W^1_{p+1}(\Omega, \delta\Omega))$,
$a_i(t,x,u(t,x),D_x u(t,x)) \in L_{\frac{p+1}{p}}((0,T_0)\times\Omega), \quad i = 1, ..., n,$
та виконуються наступні умови, що забезпечують збіжність інтегралів:

i) $u - f \in L_{p+1}(0, T_0; W^1_{p+1}(\Omega, \delta\Omega)) \cap L_\infty(0); T_0; L_{q+1}(\Omega));$

ii) $(|u|^{q-1})'_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T_0; (W^1_{p+1}(\Omega, \delta\Omega))*)$

Означення (енергетичного узагальненого розв'язку)

і виконана початкова умова (3) у сенсі

$$\int\limits_0^{T_0} \langle (|u|^{q-1}u)'_t, \xi \rangle dt + \int\limits_0^{T_0} \int\limits_{\Omega} (|u|^{q-1}u - |u_0|^{q-1}u_0)\xi'_t dxdt = 0$$

для довільної пробної функції $\xi(t,x) \in L_{p+1}(0, T_0; W^1_{p+1}(\Omega, \delta\Omega)) \cap W^1_1(0, T_0; L_\infty(\Omega))$, *яка обертається в нуль в околі* $t = T_0$*;*

Означення (властивості локалізації)

Задача (1)-(3) має властивість локалізації, якщо будь-який її енергетичний розв'язок $u(t,x)$ має наступну властивість:

$$\zeta(t) \equiv \inf\{r : \operatorname{supp} u(t,\cdot) \subset B(r)\} < R \quad \forall t < T.$$

Допоміжні леми та теореми

Лема

Для майже всіх $a, b, 0 \le a < b < T$ *має місце наступна глобальна апріорна оцінка довільного енергетичного розв'язку* $u(t, x)$ *задачі (1) - (3):*

$$\int_\Omega |u(b,x)|^{q+1}dx + \int_a^b \int_\Omega |D_x u|^{p+1}\, dxdt$$
$$\leqslant c_1 \int_\Omega |u(a,x)|^{q+1}dx + c_2 \left(1 + \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right) F_1(a,b) \tag{11}$$

$\zeta_1(s) = \sup_{0 \le \tau < s} \zeta(\tau), \quad \zeta(\tau) < R \quad \forall t < T;$

Допоміжні леми та теореми

Лема

$$F_1(a,b) \equiv \int_\Omega |f(b,x)|^{q+1} dx + \int_a^b \int_\Omega |D_x f|^{p+1}\, dxdt +$$

$$+ \left(\int_a^b \|f_t'\|_{L_{q+1}(\Omega)}\, dt \right)^{q+1} + \int_a^b \|f_t'\|^{p_1}_{L_{p_1}(\Omega)}\, dt;$$

$F_1(0,b) \equiv F(b)$; $\quad p_1 = \frac{p+1}{p-q+1}$.

Допоміжні леми та теореми

Теорема

Нехай деяке сімейство неперервно диференційованих невід'ємних незростаючих на інтервалі $[0,\infty)$ *функцій* $\{U_i(s)\},\ i=\overline{1,j}\ ,$ $j\le\infty$, *задовільняє наступній системі диференційних нерівностей:*

$$U_i(s)\le\lambda U_{i-1}(s)+k\left(-U_i'(s)\right)^{1+\gamma}\ \forall s\in(0,\infty),\ 0<\lambda<1,\ U_0(s)\equiv 0, \tag{12}$$

$$U_i(0)\le K_i<\infty\quad\forall i\le j,\quad k=\mathrm{const}<\infty,\quad \gamma=\mathrm{const}>0, \tag{13}$$

де $\{K_i\}$ *- неспадна послідовність додатних чисел. Тоді для вказаних функцій* $U_i(s)$ *є справедливими наступні апріорні оцінки:*

Допоміжні леми та теореми

Теорема

$$U_i(s) \le M_i(s) \equiv a_1 k^{-\frac{1}{\gamma}} [a_2 (kK_i^\gamma)^{\frac{1}{1+\gamma}} - s]_+^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \quad \forall i \le j, \quad \forall s > 0, \tag{14}$$

де $a_1 = (1-\lambda)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}}$, $a_2 = (1+\gamma)\gamma^{-1}(1-\lambda)^{-\frac{1}{1+\gamma}}$, $f(s)_+ \equiv \max(0, f(s))$.
Зокрема справедливі наступні оцінки для носіїв усіх функцій $U_i(s)$:

$$U_i \in [0, b_i], \quad b_i = a_2 (kK_i^\gamma)^{\frac{1}{1+\gamma}}. \tag{15}$$

Основний результат моєї роботи полягає у наступній теоремі.

Теорема (Достатня умова локалізації розв'язку)

Нехай $0 < q < p$ *та виконані структурні умови*
$\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,s,\xi)\xi_i \geqslant d_0|\xi|^{p+1} \quad \forall (t,x,s,\xi) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \quad d_0 > 0;$

$|a_i(t,x,s,\xi)| \leqslant d_1|\xi|^p \quad \forall (t,x,s,\xi) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, d_1 < \infty, i = \overline{1,n}$
та умова на початкову функцію u_0*:*

$$supp\ u_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < d\}, \quad 1 < d < R.$$

Теорема (Достатня умова локалізації розв'язку)

Нехай граничний режим такий, що

$$F(t) \leqslant \omega(T-t)^{-\alpha_1} \quad \forall t < T, \quad \alpha_1 = \frac{q+1}{p-q}, \quad \omega = \mathrm{const} < \infty. \tag{16}$$

Тоді існують такі постійні $R_0 = R_0(d, d_0, d_1, q, p, \|u_0\|_{L_{q+1}(\Omega)}) < \infty$ *та*
$K = K(R) > 0$, *що задача (1) - (4) має властивість локалізації, як тільки* $R > R_0, \ \omega < K$.

Доведення основної теореми

Доведення основної теореми проводиться на основі вивчення властивостей функцій, що задовільняють нескінченній диференціальній системі

$$E_j(s) \leqslant r_1 h_{j-1}(s) + r_2 \Delta_j^{\nu}\Big(-\frac{dE_j(s)}{ds}\Big)^{1+\mu} \quad \forall s > 1, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

$$h_j(s) \leqslant (1+\delta_j)h_{j-1}(s) + r_3 \delta_j^{-\frac{(p+1)\nu}{q+1}} \Delta_j^{\nu}\Big(-\frac{dE_j(s)}{ds}\Big)^{1+\mu} \tag{18}$$

$$\forall s > 1, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \forall \delta_j > 0,$$

де константи $r_1, r_2, r_3 < \infty$ залежать лише від відомих параметрів,

$$\nu = \frac{(1-\theta)(q+1)}{q(p+1)+\theta(p-q)} < 1, \quad \mu = \frac{(1-\theta)(p-q)}{q(p+1)+\theta(p-q)},$$

$$\theta = \frac{n(p-q)+q+1}{n(p-q)+(q+1)(p+1)}.$$

Спочатку деталізуємо вибір послідовності $\{t_j\}$. Зафіксуємо два числа

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$$

і вибір точок послідовності $\{t_j\}$ зумовимо лише одним обмеженням:

$$\xi_1 < \frac{\Delta_i + 1}{\Delta_i} < \xi_2 \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

При цьому будуть виконуватися наступні співвідношення:

$$\frac{\xi_1}{1-\xi_1}\Delta_j \leqslant T - t_j \equiv \sum_{i=j+1}^{\infty} \Delta_i \leqslant \frac{\xi_2}{1-\xi_2}\Delta_j \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Тепер введемо нормовані функції:

$$A_j(s) = \Delta_j^{\frac{q+1}{p-q}} E_j(s), \quad H_j(s) \equiv \Delta_j^{\frac{q+1}{p-q}} h_j(s), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

При цьому співвідношення (17), (18) еквівалентні співвідношенням:

$$A_j(s) \leqslant r_4 H_{j-1}(s) + r_2(-A_j'(s))^{1+\mu} \quad \forall s > 1, \quad r_4 = r_1 \xi_2^{\frac{q+1}{p-q}}, \tag{21}$$

$$H_j(s) \leqslant (1+\delta_j)\xi_2^{\frac{q+1}{p-q}} H_{j-1}(s) + r_3' \delta_j^{-\frac{(p+1)\nu}{q+1}} (-A_j'(s))^{1+\mu} \quad \forall s > 1, j \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

де $H_0(s) \equiv T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s)$.

Зафіксуємо деяке $\lambda, 1 > \lambda > \xi_2^{\frac{q+1}{p-q}}$, та оберемо параметр δ_j так, що $(1+\delta_j)\xi_2^{\frac{q+1}{p-q}} = \lambda \Longrightarrow \delta_j = \delta_0 \equiv \lambda \xi_2^{-\frac{q+1}{p-q}} - 1$.

Доведення основної теореми

Співвідношення (22) набуде вигляду:

$$H_j(s) \leqslant \lambda H_{j-1}(s) + r_3(-A_j'(s))^{1+\mu}, \quad r_3 = r_3'(\delta_0)\delta_0^{-\frac{(p+1)v}{q+1}}. \qquad (23)$$

Тепер почнемо ітерувати співвідношення (21), оцінюючи при цьому усі $H_i(s)$ за допомогою співвідношення (23).
Отримаємо:

Доведення основної теореми

$$\begin{aligned}
A_j(s) \leqslant & r_4 H_{j-1}(s) + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \\
\leqslant & r_4 \lambda H_{j-2}(s) + r_4 r_3 \left(-A_{j-1}'(s)\right)^{1+\mu} + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \\
\leqslant & r_4 \lambda^2 H_{j-3}(s) + r_4 r_3 \lambda \left(-A_{j-2}'(s)\right)^{1+\mu} \\
& + r_4 r_3 \left(-A_{j-1}'(s)\right)^{1+\mu} + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \\
\leqslant & \cdots \leqslant r_4 \lambda^{j-1} H_0(s) + r_4 r_3 \Big[\lambda^{j-2} \left(-A_1'(s)\right)^{1+\mu} + \lambda^{j-3} \left(-A_2'(s)\right)^{1+\mu} \\
& + \cdots + \lambda^2 \left(-A_{j-3}'(s)\right)^{1+\mu} + \lambda \left(-A_{j-2}'(s)\right)^{1+\mu} \\
& + \left(-A_{j-1}'(s)\right)^{1+\mu} + \frac{r_2}{r_3 r_4} \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \Big] \\
\leqslant & r_4 \lambda^{j-1} H_0(s) + r_5 \sum_{i=1}^{j} \left(-\lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} A_j'(s)\right)^{1+\mu},
\end{aligned} \tag{24}$$

де $r_5 = \frac{r_3 r_4}{\lambda} \max\left(1, \frac{\lambda r_2}{r_3 r_4}\right)$.
З нерівності (24) отримуємо:

$$A_j(s) \leqslant r_4 \lambda^{j-1} T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 [\sum_{i=1}^{j} (-\lambda^{\frac{j-1}{1+\mu}} A_i'(s))]^{1+\mu} \qquad (25)$$

Розглянемо сімейство невід'ємних функцій:

$$U_j(s) \equiv \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} A_i(s), \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Очевидною є наступна рівність:
$U_j(s) - \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s) = A_j(s), \quad U_0(s) = 0$, тому співвідношення (25) може бути переписано у вигляді:

$$U_j(s) \leqslant \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s) + r_4 \lambda^{j-1} T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 (-U_j'(s_j))^{1+\mu} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \qquad (26)$$

Доведення основної теореми

$$U_j(1) = \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} A_i(1) = \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} \Delta_i^{\frac{q+1}{p-q}} E_i(1) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Для оцінки зверху $E_j(1)$ скористаємося нерівністю з леми (1). В силу (20) отримуємо:

$$F_1\left(1, t_j\right) \equiv F\left(t_j\right) \leqslant \omega \left(T - t_j\right)^{-\alpha_1} \leqslant \omega \left(\frac{1-\xi_1}{\xi_1}\right)^{\alpha_1} \Delta_j^{-\frac{q+1}{p-q}},$$

Зі співвідношення (11) при $a = 0, b = t_j$ маємо:

$$E_j(1) \leqslant c_1 h_0(1) + c_3 \omega \left(1 + \zeta_1\left(t_j\right)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right) \Delta_j^{-\frac{q+1}{p-q}}, \quad c_3 = c_2 \left(\frac{1-\xi_1}{\xi_1}\right)^{\frac{q+1}{p-q}}$$

Доведення основної теореми

$$U_j(1) \leqslant c_1 g_j T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(1) + c_3\omega\left(1-\lambda^{\frac{1}{1+\mu}}\right)^{-1}\left(1+\zeta_1\left(t_j\right)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right),$$

де

$$g_j \equiv \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} 2^{-\frac{i(q+1)}{p-q}} \leqslant \lambda^{\frac{j}{1+\mu}}\left(\lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{q+1}{p-q}} - 1\right)^{-1} \text{якщо } \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{q+1}{p-q}} > 1,$$

$$g_j \leqslant j 2^{-\frac{j(q+1)}{p-q}}, \quad \text{якщо } \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{q+1}{p-q}} = 1,$$

$$g_j \leqslant 2^{-\frac{j(q+1)}{p-q}}\left(1-\lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{q+1}{p-q}}\right), \quad \text{якщо } \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{1+q}{p-q}} < 1.$$

Так як $g_j \leqslant g_0 = \text{const} < \infty$, де g_0 не залежить від $j \in \mathbb{N}$, то оцінку для $U_j(1)$ можна записати у вигляді:

$$U_j(1) \leqslant (c_4 + c_5\omega) + c_5\omega\zeta_1\left(t_j\right)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{27}$$

де

$$c_4 = c_1 g_0 T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(1), \quad c_5 = c_3\left(1 - \lambda^{\frac{1}{1+\mu}}\right)^{-1}.$$

Остаточно маємо такі дві нерівності:

$$\begin{aligned} U_j(s) &\leqslant \lambda_1 U_{j-1}(s) + r_5\left(-U_j'(s)\right)^{1+\mu} \quad \forall s > d, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \\ U_j(d) &\leqslant (c_4 + c_5\omega) + c_5\omega\zeta_1\left(t_j\right)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \lambda_1 = \lambda^{\frac{1}{1+\mu}}. \end{aligned}$$

З цієї системи в силу теореми (1) випливає наступна рівномірна оцінка носіїв функцій $U_j(s)$:

$$\zeta\left(t_j\right) \leqslant d + c_6\left(c_4 + c_5\omega\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_6 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}} \omega^{\frac{\mu}{1+\mu}} \zeta_1\left(t_j\right)^{\varkappa} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (28)$$

де

$$\varkappa = \frac{q(p+1)(p-q)}{(p-q+1)[n(p-q)+(q+1)(p+1)]} < 1 \quad \forall n \geqslant 1, \quad p > q.$$

Для доведення основної теореми (3) достатньо встановити оцінку зверху для функції $\zeta(t)$ на множині

$$S = \{t \in (0, T) : \zeta(t) = \zeta_1(t)\}\,. \tag{29}$$

З огляду на співвідношення (28) і визначення (29) маємо:

$$\zeta(t) \leqslant d + c_6\left(c_4 + c_5\omega\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_6 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}} \zeta(t)^{\varkappa} \omega^{\frac{\mu}{\mu+1}} \leqslant$$

$$\leqslant d + c_6\left(c_4 + c_5\omega\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + \varepsilon\zeta(t) + c_7(\varepsilon)\left(c_6 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}} \omega^{\frac{\mu}{(1+\mu)(1-\varkappa)}} \leqslant$$

$$\leqslant (1-\varepsilon)^{-1}\left[d + c_6\left(c_4 + c_5\omega\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_7(\varepsilon)\left(c_6 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}} \omega^{\frac{\mu}{(1+\mu)(1-\varkappa)}}\right] \equiv$$

$$\equiv D(\varepsilon, \omega)$$

$$D(\varepsilon, 0) = (1-\varepsilon)^{-1}\left(d + c_6 c_4^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right) = \frac{D_0}{1-\varepsilon} < R \quad \forall \varepsilon > 0.$$